数理解析研究所講究録
677巻 1989年 23-36

渦運動への複素関数論の応用

東京大学理学部　中村英史　(Fusashi Nakamura)

§1．vortex sheet について

ここで取り扱う渦運動とは二次元 vortex sheet である。通常は、次の Rott-Birkhoff 方程式を解くことに帰着される。

$$\partial \overline{z(\Gamma, t)} / \partial t = (1/2\pi i) ⨍_{-\infty}^{\infty} 1 / \{ z(\Gamma, t) - z(\Gamma', t) \} d\Gamma'$$

ここに Γ は、total vorticity 、‾ は複素共役である。
(Birkhoff 自身はよく引用される論文 [Birkhoff,1962] の中ではその導出を述べていない。原理的には Biot-Savart の法則であり [Sulem,Sulem,Bardos and Frish,1981] のなかに厳密な導出がある）。昔から Kelvin - Helmholtz instability、有限時間内の発散問題に対する興味から多くの研究が成されているが一般的結論は得られていない。これは Rott-Birkhoff 方程式が初期値問題として ill-posed な積分方程式だからである。flat uniform infinite vortex sheet が sinusoidal perterbation に対して不安定であることは Helmholtz によって指摘されていたが、 Moore はこれを漸近的展開法により解析し、ある有限時間内に vortex sheet の傾きは有限かつ連続であるが、曲率が発散するような特異点が生ずることを示した。[Moore,1979,1984] その後行われた数値計算で　Moore の結果は支持されている。[Meiron et al,1982]、[Krasny,1986]。 Moore の結果は近似的であるが、Caflish が Cauchy-Kowalewski の定理を使って解析的に同様な結果を導き出している。[Caflish and Orellana ,1986]。

この他、spiral solution を求める試みも成されている。[金田]、[神部]。

§2．解析法、複素関数論と佐藤超関数論

本報告で使用する複素関数論とは、佐藤の超関数論である。そもそも二次元の問題であるから上に挙げた諸研究も普通の複素関数論を当然使っている。しかし、それは流体力学の伝統的手法として二次元の流れを複素平面で定式化するものでしかない。ただ、Caflish は vortex sheet を

$$z(\gamma, t) = \gamma + s(\gamma, t) \quad (\gamma \text{ は Lagrangian variable})$$

とあらわして s を γ の正則関数として解析接続し、関数解析を使い Cauchy-Kowalewski の定理を応用している。これは純粋数学的な新しい手法である。しかしながら物理学者にとっては難解であまり馴染みやすくはない。。

ではどうしたら元の物理的現象を直感的に、合理的に定式化できるだろうか?この答えは vortex sheet が速度の不連続面を渦によってモデル化したものであるという事実の中にある。このモデルでは、速度場はある境界面以外では渦なし

であり、境界面の両側で不連続である。その不連続速度の差が境界面のその点における渦の強さであり、平均が境界面のその点にある粒子の速度である。便宜的に vortex sheet の上下の渦無し速度場を

$$F_+(z, t),\ F_-(z, t)$$

とすれば、vortex sheet 上の点 $z(\gamma, t)$ における渦度 ω と誘導速度 v は、それぞれ、

$$F_+(z(\gamma, t), t) - F_-(z(\gamma, t), t),$$
$$\{F_+(z(\gamma, t), t) + F_-(z(\gamma, t), t)\} / 2$$

と書ける。ところで、実軸で不連続で上半平面、下半平面では正則であるような複素関数 $F(z)$, ($\mathrm{Im} z <> 0$ により $F_-(z)$, $F_+(z)$ とかいても同じ) に対して

$$f(x) = F_+(x + i0) - F_-(x - i0)$$

により佐藤の超関数 $f(x)$ が定義される。また、

$$Hf(x) = 2i\{F_+(x + i0) + F_-(x - i0)\}$$

は、f の Hilbert 型変換となる。これを vortex sheet 問題に応用したのが本報告である。その結果、定常的な特解を発見した。これは、Kirchhoff の楕円渦領域の極限と一致する。但し、安定性問題は扱っていない。

この後、§3で佐藤超関数論について最小限の準備をし、§4で佐藤超関数を使った問題の定式化を行い、§5で特解を求める。なお、vortex sheet 問題に佐藤超関数を使う研究は今までは皆無に等しい。初めてその様な考え方が示されたのはおそらく［今井,1981］においてである。しかし、直接的に適用すると vortex sheet は常に flat に固定されるので大きな発展はみられない。その後一般に曲線である vortex sheet に対して適用し定式化する試みが示された。［神部］本報告はこの後を受け継ぎ発展したものである。

§3　佐藤超関数論要約

普通超関数と言えば、Dirac の δ 関数などに代表される Schwartz の”超関数”(distribution)が物理学者に取っておなじみである。これに対して、佐藤の”超関数”(hyperfunction)は高度な現代数学の一分野として発展し物理学との関係は疎遠である。しかしながら、§2で述べたように一次元の佐藤超関数は実軸(またはその部分集合)を除いたところで正則な関数の”実軸を挟んだ上下の極限値の差”として定義されるという簡単なものである。実軸を除いた上下半平面では関数論が使える。実軸での極限値の差を超関数の値として積極的に取り入れることがこの理論(一次元の場合)の特色であり、他の物理分野への応用もあると思われる。

なおここでは余り詳しく解説できないので、参考文献を挙げておく。［藤田，I，II］、［今井，1981］。定理の証明などはこれを見ていただきたい。このほか、数学に興味ある人には佐藤の原論文［佐藤，1958］、比較的平易な入門書として［金子，1980］がある。

定義 3-1

$\Omega \subset \mathbb{R}$ を任意の区間（有限でも無限でも良い）、$U \supset \Omega$ を Ω の複素近傍とする。（fig 3-1 参照）　$\mathcal{O}(U)$、$\mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ を各々、U 上、$U \setminus \Omega$ 上で正則な関数全体の集合とする。このとき、$F(z), G(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ に対して、$F(z) - G(z) \in \mathcal{O}(U)$ がなりたつとき（i.e. $F(z) - G(z) = \phi(z) \in \mathcal{O}(U)$ となる $\phi(z)$ が存在するとき）、$F(z)$ と $G(z)$ は同値であるといい $F(z) \sim G(z)$ とかく。

(fig 3-1)

定義 3-2

$F(z), G(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ でかつ $F(z) \sim G(z)$ のとき $F(z)$, $G(z)$ は Ω 上"同じ"超関数 $f(x)$ を定めると言い、

$$f(x) = \mathrm{H.F.}F(z) = \mathrm{H.F.}G(z)$$

とかく。このとき、$F(z)$，$G(z)$ を $f(x)$ の母関数という。

上の定義の妥当性は、次の定義を見れば判る。

定義 3-3

$x \in \Omega$ における超関数 f の値を、

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \{F(x + i\varepsilon) - F(x - i\varepsilon)\}$$

で定義する。但し、左辺の極限値が存在するときに限る。以後、上式を、

$$f(x) = F(x + i0) - F(x - i0)$$

とかく。

極限値がないときは、$f(x)$ は定義されないが、これは δ 関数が普通の関数としては $x = 0$ において定義されないのと同様である。

$F(z)$ の代わりに、$F(z) \sim G(z)$ となる $G(z)$ を使うと、定義 3-1

により、$F(z)-G(z)=\phi(z)\in\mathcal{O}(U)$ となる $\phi(z)$ が存在するから、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= F(x+i0)-F(x-i0)\\
&= \{G(x+i0)+\phi(x+i0)\}\\
&\quad -\{G(x-i0)+\phi(x-i0)\}\\
&= G(x+i0)-G(x-i0)+\phi(x+i0)-\phi(x-i0)\\
&= G(x+i0)-G(x-i0)
\end{aligned}
$$

となり、$F(z)$ も $G(z)$ も”同じ”超関数 $f(x)$ を定める。
さて、U を $U_+=\{z\in U;\mathrm{Im}\,z>0\}$、$U_-=\{z\in U;\mathrm{Im}\,z<0\}$ に分ければ、$F(z)$ は $F_+(z)\in\mathcal{O}(U_+)$, $F_-(z)\in\mathcal{O}(U_-)$ なる正則関数のペア $\{F_+(z),F_-(z)\}$ を考えるのと同じである。即ち、

$$F(z)=F_+(z),\ (\mathrm{Im}\,z>0);\quad F_-(z),\ (\mathrm{Im}\,z<0)$$

この時、

$$f(x)=\mathrm{H.F.}F(z)=\mathrm{H.F.}\{F_+(z),F_-(z)\}$$

とかく。
今後は適当に両記法を使い分けていく。

この様に超関数は、母関数 $F(z)$ を（U 上正則な関数の差だけの不定性を許して）定めれば決まる（実は、U の取り方によらない）から超関数の種々の性質は母関数で表すことが出来る。

定義 3-4
$f(x)$, $g(x)$ を Ω 上の超関数、$F(z)$, $G(z)$ を各々の母関数、α、β を任意の複素数、$\phi(z)$ を U 上の正則関数（とくに Ω においても正則）とする。このとき、Ω 上の超関数；

$$
\begin{aligned}
&\alpha f(x)+\beta g(x),\\
&\phi(x)f(x)
\end{aligned}
$$

を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
&\alpha f(x)+\beta g(x)=\mathrm{H.F.}\{\alpha F(z)+\beta G(z)\},\\
&\phi(x)f(x)=\mathrm{H.F.}\{\phi(z)f(z)\}
\end{aligned}
$$

一般に $f(x)$ と $g(x)$ の積は定義できないことに注意せよ。

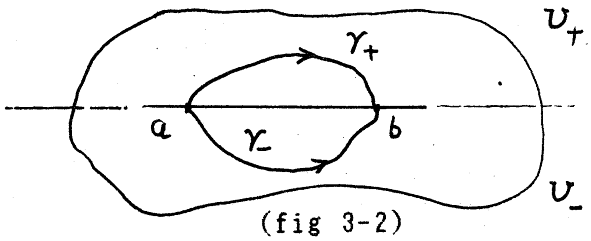
次に、超関数に対する微分、積分計算を定義する。

定義 3-5
$f(x) = H.F.F(z)$ とする。このとき、$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を

$$f'(x) = H.F.F'(z)$$

で定義する。$f'(x)$ を df/dx ともかく。

定義 3-6
$f(x) = H.F.F(z) = H.F.\{F_+(z),\ F_-(z)\}$ とする。$F(z)$，$F(z)$ は $a, b \in \Omega$ で正則とする。γ_+、γ_- を fig 3-2 のように a, b を結ぶ各々 U、U 内の曲線、$\gamma = \gamma_- - \gamma_+$ を γ_+、γ_- をつないで正の方向に回る閉曲線とする。



(fig 3-2)

この時、$f(x)$ の a から b 迄の定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

を次のように定義する。

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\gamma_+} F_+(z)\,dz + \int_{\gamma_-} F_-(z)\,dz$$
$$= -\int_\gamma F(z)\,dz$$

次に、U 上正則な関数分だけ不定性がある母関数の中で特別なものを取り出そう。

定理 3-7
$f(x) = H.F.F(z)$ とする。この時、

$$G(z) = 1/(2\pi i) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)/(x-z)\,dx$$

で定義される $G(z)$ は、存在すれば $\mathbb{C}\setminus\Omega$ で正則で、

$$f(x) = H.F.G(z) \quad (z \in \Omega)$$

が成り立つ。（このような $G(z)$ は存在しないこともある。Ω が有限閉区間なら常に存在する。）

定義 3-8
定理 3-7 で定義された $G(z) \in O(\mathbb{C}\setminus\Omega)$ を $f(x)$ の標準母関数といい、$G.F.f(x)$ とかく。

定理 3-9
$f(x)$ は Ω の外へ拡張できる。実際、標準母関数 $G(z)$ は $x \in C \setminus \Omega$ において正則だから、$G(x+i0)-G(x-i0)=0$ $(x \in R \setminus \Omega)$ となる。よって

$$g(x) = \mathrm{H.F.}G(z)$$

とすれば、$g(x)$ は R 上で定義された超関数で
$x \in \Omega$ にたいしては $g(x) = f(x)$
$x \in R \setminus \Omega$ にたいしては $g(x) = 0$

R 上絶対可積分な関数 $h(x)$ については、次の定理よって R 上の超関数とみなせる。

定理 3-10
R 上絶対可積分な関数 $h(x)$ にたいして、

$$H(z) = (1/2\pi i)\int_{-\infty}^{\infty} h(x)/(x-z)\,dx$$

で $H(z)$ を定義すれば、$H(z)$ は $C \setminus R$ で正則な関数となり、

$$h(x) = H(x+i0) - H(x-i0)$$

が成り立つ。この時、$H(z)$ を標準母関数とするような超関数を元の関数と区別するため

$$\iota[h](x)$$

とかく。このとき、$x \in R$にたいして，$h(x) = \iota[h](x)$である。

このほか、収束因子を用いて有理型関数を超関数とみなすことも出来る。[今井、1981] をみよ。

最後に vortex sheet を超関数を使って定式化する際重要な鍵となる Hilbert（型）変換について述べておく。

定義 3-11

$$E(z) = 1/2 \quad (\mathrm{Im}\, z > 0);\quad -1/2 \quad (\mathrm{Im}\, z < 0)$$

$f(x) = \mathrm{H.F.}F(z)$、但し、$F(z)$ は標準母関数とする。（定義 3-8 をみよ）この時、$2iF(z)E(z)$ を母関数とする超関数を $f(x)$ の Hilbert 変換といい、$Hf(x)$ とかく。i.e.

$$Hf(x) = 2i\,\mathrm{H.F.}\{F(z)E(z)\}$$

この定義の妥当性は、次の定理が保証してくれる。

定理 3-12
g（x）を普通の関数とし、ordHg（x）をその通常の Hilbert 変換とする。
i.e.

$$\mathrm{ordH}g(x) = (1/\pi)⨍_{-\infty}^{\infty}\{g(t)/(t-x)\}dt$$

但し、⨍ は主値積分を意味する。一方、定理 3-10 により g（x）は超関数；$\iota[g](x)$ と見直されるが、定義 3-11 を使って超関数としての Hilbert 変換；$H\{\iota[g]\}(x)$ が存在するとする。これを、v（x）、その母関数を V（z）とかくことにする。この時次が成り立つ。

$$\mathrm{ordH}g(x) = v(x) = V(x+i0) - V(x-i0)$$

但し、x で右辺の極限値が存在するとする。

一般に全ての超関数が標準母関数を持つとは限らない。持たないときは Hilbert 変換が定義できないが類似の概念を導入できる。

定義 3-13
$f(x) = \mathrm{H.F.}\{F_+(z), F_-(z)\}$ とする。$F_+(z)$，$F_-(z)$ が各々、$\mathrm{Im}z>0$、$\mathrm{Im}z<0$ で正則であるとき（即ち、上、下半平面至るところで正則な時）、$\{F_+(z), F_-(z)\}$ を標準型母関数という。

標準型母関数は整関数の差だけ不定性があるが任意の超関数に対して存在することが判っている。

定義 3-14
超関数 f（x）の標準型母関数のひとつを $F(z) = \{F_+(z), F_-(z)\}$ とする。この時、$2iF(z)E(z)$ を母関数とする超関数を $f'(x)$ の Hilbert 型変換といい、$H\hat{}f(x)$ とかく。

Hilbert 変換との関係は次の定理である。

定理 3-15
超関数 f（x）が Hilbert 変換 Hf（x）をもてば、

$$H\hat{}f(x) = Hf(x) + \phi(z)$$

$\phi(z)$ は任意の整関数、と書ける。
$H\hat{}f(x)$ と $Hf(x)$ の違いに注意せよ。（詳しくは、［今井、1981Ⅱ］を参

照せよ。)

§4　佐藤超関数による vortex sheet 問題の定式化と基礎方程式

まず物理状況を表す記号を次のように設定する。

α ; Lagrangian variable, 但し、$\alpha \in \Omega = (a, b)$ $(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$

$z(\alpha, t)$; vortex sheet上の Lagrangian variable α の流体粒子の時刻 t における位置

$S(t)$; 時刻 t における vortex sheet の形

$W(z, t)$; 時刻 t における複素速度場

$$W(z, t) = u(z, t) - i\, v(z, t)$$

$\vec{w}(z, t)$; 時刻 t における速度ベクトル場

$$\vec{w}(z, t) = (u(z, t),\ v(z, t))$$

$\gamma(z', t)$; vortex sheet 上の点 z' における単位長さあたりの渦の強さ

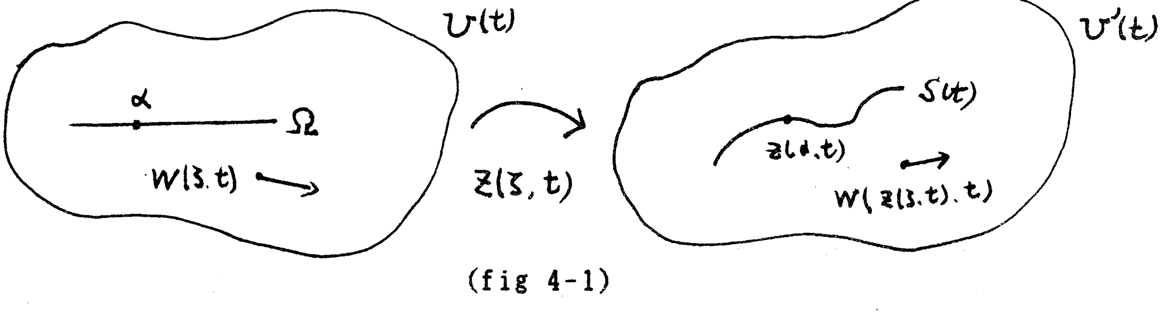
$\rho(\alpha)$; vortex sheet 上の点 $z(\alpha, t)$ における単位 Lagrangian variable あたりの渦の強さ(時刻 t によらない)、後で説明する。

次に重要な仮定をおく。

仮定; $z(\alpha, t)$ は t を固定したとき α について Ω の複素近傍 $U(t)$ に $\zeta = \alpha + i\beta$ の形で解析接続できる。更に、$z(\zeta, t)$ は $U(t)$ 上等角写像である。よって、$S(t)$ のある複素近傍 $U'(t)$ で $z(\zeta, t)$ により $U(t)$と diffeomorphic なものが存在する。

この仮定はかなり強いものであるが、初期条件問題として $t = 0$ において vortex sheet の形が滑らかで渦度の分布も滑らかならば少なくともある有限時間内では成り立っているとしてよいだろう。この仮定により、時刻 t における vortex sheet $S(t)$は座標変換 $z(\zeta, t)$ によって ζ 平面の実軸(α 軸)の部分集合 Ω に写され、§3で述べた超関数が使える。(即ち、$S(t)$ を一次元多様体と見る。)更に $U'(t)$ と $U(t)$ は座標変換 $z(\alpha, t)$ で一対一対応しているから速度ベクトル場も $U(t)$ 上で考えても良い。

$W(z(\zeta, t), t)$、$W(z(\alpha, t), t)$ を $W(\zeta, t)$、$W(\alpha, t)$、時には t を省略して $W(\alpha)$、$W(\alpha)$ とかく。$\gamma(\alpha, t)$ も同様である (fig 4-1)。



(fig 4-1)

なお Biot-Savart の法則により速度場が、$U'(t)$ 上では

$$W(z,t)=(1/2\pi i)\int_{S(t)}\{\gamma(z',t)/(z-z')\}ds'$$
$$(ds'=|dz'|)$$

$U(t)$上では

$$W(\alpha,t)$$
$$=(1/2\pi i)\int_{\Omega}\rho(\alpha',t)/\{z(\alpha,t)-z(\alpha',t)\}d\alpha'$$

と書けることに注意しておこう。

次に γ と ρ の関係を調べてみる。普通は、ρ として $d\Gamma=\gamma ds$ で定義される total vorticity Γ を Lagrangian variable として使う。（この時、γ も ds も t に依存しているが Γ は t に依存していない。）しかしながら、この $s\to\Gamma$ という変数変換が可能であるためには、$\gamma(s,t)>0$ でなくてはならない。一般にはそうである必要はない。特に二次元非粘性の場合には渦度は正負に関わらずに保存されるからである。vortex sheet 上の渦度の分布が定符号でない場合は、$\Gamma=\int\gamma ds$ は Lagrangian variable として well-defined でなくなる。よって何か別の適当な Lagrangian variable を用意しておく必要がある。ここで、$\gamma ds=\rho d\alpha$ が成り立っていることに注意せよ。

さていよいよ定式化に入るがその前に便宜上次の記号を導入しておく。

$$W_+(\alpha)\equiv W_+(\alpha,t)=W(\alpha+i0,t)$$
$$W_-(\alpha)\equiv W_-(\alpha,t)=W(\alpha-i0,t)$$
$$[W(\alpha)]=W_+(\alpha)-W_-(\alpha)$$
$$\{W(\alpha)\}=(W_+(\alpha)+W_-(\alpha))/2$$

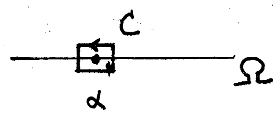
速度ベクトル場 $\vec{w}$（Wとの違いに注意せよ）についても同様にする。
次に本報告で使った vortex sheet のモデルをのべる。

① $\gamma(\alpha,t)=[\vec{w}(\alpha)]\cdot\vec{e}$

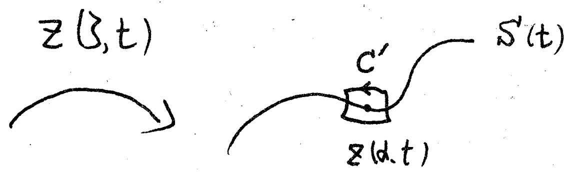
但し$\vec{e}$ は $z(\alpha)$ における vortex sheet の tangent vector 、• は二次元ベクトルの内積である。

② $\partial z(\alpha,t)/\partial t=\{\overline{W(\alpha,t)}\}$

座標変換 $z(\alpha,t)$ により速度場の不連続面が flat でない場合でも vortex sheet として well-defined にモデル化されることに注意せよ。さて、② は両辺の複素共役を取ればよいが、① は複素表示しなければならない。ここでは概略を示す。まず、ζ 平面内に点 α を囲む十分小さな閉曲線 C をとる (fig 4-1)。z 平面内では、vortex sheet 上の点 $z(\alpha)$ を囲む十分小さい閉曲線 C' が対応する (fig 4-2)。



(fig 4-2)



(fig 4-3)

いま、C’の回りの循環を考える。

$$\oint_{C'} W(z)\,dz = \Gamma(C') + iQ(C')$$

となるが、渦のみで湧き出しはないから $Q(C')=0$。さらに、z から ζ に変数変換すれば、

$$\begin{aligned}\Gamma(C') &= \oint_{C'} W(z)\,dz \\ &= \oint_{C} W(\zeta)\,(\partial z/\partial \zeta)(\zeta)\,d\zeta \\ &\fallingdotseq -[W(\alpha)]\,(\partial z/\partial \alpha)(\alpha)\,\delta\alpha\end{aligned}$$

一方、複素数を二次元ベクトルと見なしたときのベクトル解析の計算より、

$$\gamma\, ds = -\mathrm{Re}([W]\,\delta z)$$

ところで、$\Gamma(C') \equiv \gamma\, ds = \rho\, d\alpha$ だから、$\delta z = (\partial z/\partial \alpha)\,\delta\alpha$ に注意して上に挙げた式をまとめると、

$$\rho(\alpha) = -[W(\alpha)]\,(\partial z/\partial \alpha)(\alpha)$$

結局次の三式が得られた。

$$\begin{aligned}&(\mathrm{I})\quad W(\zeta) \\ &\qquad = (1/2\pi i)\int_{\Omega} \rho(\alpha')\,/\,(z(\zeta,t) - z(\alpha',t))\,d\alpha' \\ &(\mathrm{II})\quad [W(\alpha)] = -\rho(\alpha)\,/\,\{(\partial z/\partial \alpha)(\alpha)\} \\ &(\mathrm{III})\quad \{W(\alpha)\} = (\partial \overline{z}/\partial t)(\alpha)\end{aligned}$$

ここで、$\psi_{\zeta}(\alpha')$ を次式で定義する。

$$\psi_{\zeta}(\alpha') = \rho(\alpha')\,\{(\zeta - \alpha')\,/\,(z(\zeta,t) - z(\alpha',t))\}$$

この $\psi_{\zeta}(\alpha')$ を使って (I) を次のように書き換える。

$$\begin{aligned}&(\mathrm{I}')\quad W\#(\zeta) = (1/2\pi i)\int_{\Omega} \{\psi_{\zeta}(\alpha')\,/\,(\alpha' - \zeta)\}\,d\alpha' \\ &\qquad \text{i.e.}\quad W\#(\zeta) = -W(\zeta)\end{aligned}$$

この $W\#(\zeta)$ は一見、標準母関数の様だがそうではない。というのも被積分関数が一つの関数ではなく1－パラメーター族だからである。即ち、

$$W\$(\eta) = (1/2\pi i)\int_{\Omega}\{\psi_{\zeta}(\alpha')/(\alpha'-\eta)\}\,d\alpha'$$

で定義した $W\$(\eta)$ は、$\eta=\xi$ のみでしか意味がないのである。これとは別に

(Ⅰ”)　$W0(\xi)$

$$= (1/2\pi i)\int_{\Omega}\{\rho(\alpha')/(\partial z/\partial\alpha)(\alpha)\}/(\alpha'-\xi)\,d\alpha'$$

で定義した $W0(\xi)$ は、標準母関数であり $f(\alpha) = H.F.W0(\xi)$ とすれば次が成り立つ。（簡単に示せる。）

定理 4-1

$$f(\alpha) = H.F.W\#(\xi)$$
$$= \rho(\alpha)/(\partial z/\partial\alpha)(\alpha)\quad(\alpha\in\Omega)$$

$W0(\xi)$ も $W\#(\xi)$ も母関数としては同じ超関数を定めるが、$W0(\xi)$ は標準母関数だが $W\#(\xi)$ はそうではない。実際に、複素速度場を表しているのは $W\#(\xi)$ である。さて、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= W\#(\alpha+i0) - W\#(\alpha-i0)\\ &= -W(\alpha+i0) + W(\alpha-i0)\\ &= -[W(\alpha)] \qquad (\text{定義より})\\ &= \rho(\alpha)/(\partial z/\partial\alpha)(\alpha) \quad (\text{Ⅱより}) \end{aligned}$$

となるから、定理 4-1 より（Ⅱ）は実は恒等式である。よって基礎方程式とはなり得ない。

次に、（Ⅲ）を調べよう。$\{W(\alpha)\}$ はその定義より、定義 3-11 を使って

$$\begin{aligned} \{W(\alpha)\} &= (W(\alpha+i0)+W(\alpha-i0))/2\\ &= -(W\#(\alpha+i0)+W\#(\alpha-i0))/2\\ &= -(1/2i)H\hat{\ }f(\alpha) \end{aligned}$$

となり、$-f(\alpha)$ の Hilbert ”型” 変換である。$W\#(\xi)$ と $W0(\xi)$ は一般に等しくないから、上式で $W0(\xi)$ を使えない。よって，もっとも一般的な形の基礎方程式は次のようになる。

(Ⅴ)　$\iota[(\partial\overline{z}/\partial\alpha)](\alpha,t) = -(1/2i)H\hat{\ }f(\alpha)$

但し、左辺は超関数と見直している。定理 3-10 をみよ。更に、解析性を強調するならば、

$$z^{*}(\xi) = \overline{z(\overline{\xi})}$$

で 定義された $z^{*}(\xi)$ を使えば良い。これは $\alpha\in\Omega$ にたいしては、$z^{*}(\alpha) = z(\alpha)$ となる ξ の正則関数である。（Ⅴ）は次のように書き直される。

(Ⅵ)　$\iota[\partial z^{*}/\partial t](\alpha,t) = -(1/2i)H\hat{\ }f(\alpha)$

§５ 特解（定常解）

$z(\alpha, t) = T(t)Z(\alpha)$ の形の（Ⅵ）の解を求める。特に定常状態を考えてみる。一般の物理的な定常状態としては、並進運動、回転運動などがあるが、渦の問題なので回転運動の定常状態を探してみよう。即ち、

$T(t) = \exp(i\omega t)$、$Z(\alpha) = \alpha$

とおく。ただし、α は定常状態における vortex sheet segment の孤長パラメーターである。この時、

$$z^{*}(\zeta, t) = \exp(-i\omega t)\zeta$$
$$\partial z^{*}/\partial t(\alpha, t) = -i\omega\exp(-i\omega t)\zeta$$

一方、右辺においては

$$W\#(\zeta, t) = \exp(-i\omega t)(1/2\pi i)\int_{\Omega} \rho(\alpha')/(\alpha' - \zeta)\,d\alpha'$$

これは、$W\#(\zeta, t)$ が標準母関数になることを示している。よって、（Ⅵ）の右辺の $\hat{H} f(\alpha)$ は Hilbert 変換 $Hf(\alpha)$ になるのである。結局、次の方程式を解けば良い。

$$(\text{Ⅶ}) \qquad -2\omega\,\iota[\alpha] = H(\iota[\rho])(\alpha) \qquad (\alpha \in \Omega)$$

正則な関数 $\phi(x)$ にたいしては、$\phi(x) = \iota[\phi](x)$ だから、ι は落としてもよい。（Ⅶ）にたいしては解が知られていて、$\Omega = (-L, L)$ であれば、$Q(\alpha) = 2\omega\sqrt{\{L^2 - \alpha^2\}}$ とおいて、

$$\rho(\alpha) = Q(\alpha) \qquad (\alpha \in \Omega)$$

が解である。即ち、この様な渦度の分布を持つ vortex sheet の segment は角速度 ω で、言い替えると、$\rho(\alpha) = \omega\sqrt{\{L^2 - \alpha^2\}}$ としたとき vortex sheet の segment は、角速度 $\omega/2$ で剛体回転する。

次にこの定常解が、楕円渦領域の Kirchhoff の解の極限と一致することを示す。fig 5-1 の様な楕円渦領域を考える。領域内の渦度 μ は一定である。ここで、

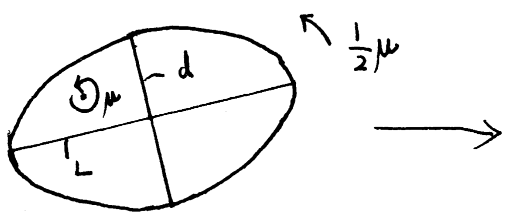


fig 5-1

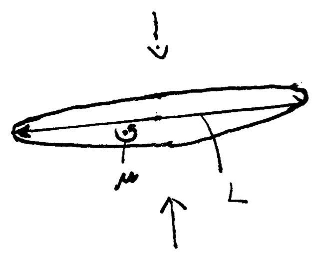


fig 5-2

渦度と短径の積 μd を一定に保ったまま $d \to 0$ としてみよう。（ fig 5-2 ） d が十分小さければ渦は長径上に分布しているものと近似できる。このとき、長径上の渦度の分布 $\sigma(x)$ は次のようになる。

$$\sigma(x) = \mu(d/L)\sqrt{\{L^2 - x^2\}}$$

Kirchhoff の解は、領域が $(1/2)\mu(d/L)$ で剛体回転する、ということであるから、$\omega = \mu(d/L)$ とおけば、上の vortex sheet segment の場合と一致する。

§6．まとめ、課題と今後の展望

§4．で示したように定理 4-1 と（VI）式を組み合わせて、f を消去したのが基礎方程式である。

$$\iota[\partial z^{*}/\partial t](\alpha, t) = -(1/2i)H\hat{\ } f(\alpha)$$
$$f(\alpha) = \iota[\rho/(\partial z/\partial\alpha)](\alpha) \quad (\alpha \in \Omega)$$

§5．では、特解として Kirchhoff の楕円渦領域解の極限となる定常解を求めた。この際特に注意しなければならないのは、基礎方程式第一式の右辺の Hilbert "型" 変換が Hilbert 変換 になりそのために解けたことである。一般には、Hilbert "型" 変換であり整関数（ポテンシャル流）分だけ不定性がある。これは、複素速度場 W#（ξ）が標準母関数でないことが原因である。W0（ξ）と W#（ξ）の関係は自明ではない。これの解明が今後の第一課題である。ただし、多変数複素関数論が必要になるかも知れない。また、端点という特異点があるがコンパクトサポートを持つ vortex sheet segment が比較的扱い安いと思われる。次に、本報告では扱わなかったが、Fourier 解析の佐藤超関数論版を用いた計算が可能なことを付け加えておこう。周期性を考慮する場合、ρ と z の二つの可能性があることに注意せよ。これが第二課題である。最終的には、ρ と z に特異性が許されかどうかを確かめなければならない。ストレートに特異性を許すことはできないと思われる。何等かの条件の緩和が必要であろう。

参考文献

*Birkhoff,G., "Helmholtz and Taylor instability in Hydrodynamic Instability", Proc.Symp.Appl.Math.XII A.M.S., 1962, pp.55-76

*Caflish,R.E., and Orellana,O.R., "Long Time Existence for a Slightly Perturbed Vortex Sheet", Comm.pure and appl Math, XXXIX, 1986, pp.807-838

*Krasny,R., "On singularity formation in a vortex sheet and the point vortex approximation", J.Fluid Mech., 167, 1986, pp.65-93

*Meiron,D.I., Baker,G.R., and Orszag,S.A., "Analytic structure of vortex sheet dynamics, Part I, Kelvin-Helmholtz instability", J.Fluid Mech., 114, 1982, pp.283-298

*Moore,D.W., "The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet", Proc.Roy.Soc.London A365, 1979, pp.105-119
*Moore,D.W., "Numerical and analytical aspects of Helmholtz instability in Theoretical and Applied Mechanics", Proc.XVI ICTAM,eds. Niordson and Olhoff, North-Holland, 1984, pp.263-274
*Sulem,C., Sulem,P.L., Bardos,C., and Frish,U., "Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin-Helmholtz instability", Comm. Math.Phys.80, 1981, pp 485-516
*今井 功 "応用超関数論 I，II "，サイエンス社，1981
*金子 晃 "超関数論入門（上）"，東京大学出版会，1980
*金田 行雄 (Spiral shaped vortex sheet), Phys.Fluid, submitted
*神部 勉 (Spiral solution of Birkhoff equation), Physica D, to appear
*神部 勉 (Hyperfunction approach to vortex sheet), Proc.S.I.A.M.work-shop, to appear
*佐藤 幹夫 "超関数の理論"，数学 10, 1958, pp.1-27
*藤田 宏 "佐藤超関数にむけて I，II "，数学セミナー I ; 1980, 12
II ; 1981, 2

＊ (....) は仮題